

第 7 回

8.	外場による偏光効果	118
8.1	応力による効果	118
8.2	電場による効果 (電気光学効果)	124
8.2.1	カー効果	125
8.2.2	ポッケルス効果	128
8.3	磁場による効果(磁気光学効果)	134
8.3.1	ファラデー効果	137
8.3.2	フォイクト効果	142

8. 外場による偏光効果

応力や電場などの外場を媒体にかけると、外場によって媒質の誘電率が変わることがある。光学的性質の外場依存性は学問的にも興味もたれ多くの研究がなされてきた。また、外場による光学的性質の制御は人為的に光学定数を制御できることを意味するから、この効果は多方面にわたる応用が期待される。応力、電場、磁場などの外場による光学異方性の変化とその偏光効果について述べる。

8.1 応力による効果

弾性体に外部から力を加えると弾性体内部に応力分布が生じ、それによってひずみ (strain) が生じる。このひずみによって弾性体内に新たな光学異方性 (複屈折) が現れる。この現象を光弾性効果 (Photoelastic effect) という。弾性体が透明ならば、弾性体内の応力分布 (ひずみ分布と考えてもよい) は光学的異方性の分布として光学的に観測できるので、この効果はひずみ検査に広く利用されている。例えば、構造物に似せて透明プラスチックで模型を作り、構造物に発生する応力分布を観測する、あるいはガラス内の残留ひずみの状態を目視観測することなどがその例である。

物体中に小さい立方体を考え、この立方体の表面に働く応力 (stress) を考える。立方体の稜線に沿って、 x 、 y 、 z 軸をとると、 x 軸に垂直な面 (y z 面) に働く応力は、面に垂直に働く張力 (圧力は負の張力と考える) T_{xx} 、面に平行に働くずれ応力 T_{yx} 、 T_{zx} がある。ここで添え字 (ij) の i は応力の方向、 j は応力が働く面を表す。一つの面につき 3 個の応力が考えられるから、応力には 9 個の成分がある (図 8.1)。

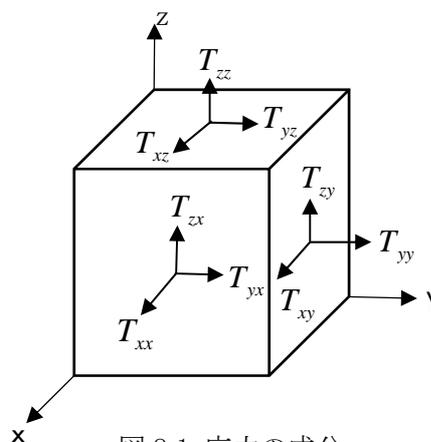


図 8.1 応力の成分

しかし、考えている立方体は回転しないから、ずれ応力の和はゼロでな

ければならない。すなわち、 $T_{yx} = T_{xy}, T_{yz} = T_{zy}, T_{zx} = T_{xz}$ となり、 $T_{ij} = T_{ji}$ が成り立つので、独立な応力成分は 6 個になる。この 6 個の応力に応じてひずみも同様に 6 個の独立な成分がある。応力の各成分 T_{ij} の添え字を慣習に従って、

$$xx = 1, yy = 2, zz = 3, yz = 4, zx = 5, xy = 6 \quad (8.1)$$

と置くと、応力成分は T_i $i = 1 \sim 6$ と書くことができる。

応力によってひずみが発生し、そのひずみによって光学定数が変化すると考える。応力が小さい範囲ではフックの法則により、ひずみは応力に比例するから、光学定数の変化もひずみに比例するとしてよいであろう。光学定数の変化は屈折率楕円体の変形として観測されるので、ひずみが起こる前の屈折率楕円体 ((5.36) 式)

$$\frac{x^2}{n_{0x}^2} + \frac{y^2}{n_{0y}^2} + \frac{z^2}{n_{0z}^2} = 1 \quad (8.2)$$

からの変形部分をひずみの 1 次で展開すると、

$$\frac{x^2}{n_{0x}^2} + \frac{y^2}{n_{0y}^2} + \frac{z^2}{n_{0z}^2} + x_i x_j P_{ijk} S_k = 1 \quad (8.3)$$

ここで $S_{1 \sim 6}$ は、(8.1) 式の記法による、ひずみの成分を表す。上記で添え字が 2 度現れるときはそれらの和 \sum をとることにする。 i, j については 1~3、 k については 1~6 について和をとる。(8.3) 式の ($i j$) についても (8.1) 式の記法を用いてもう少し具体的に書き下すと、

$$\begin{aligned} x^2 \left(\frac{1}{n_{0x}^2} + P_{1k} S_k \right) + y^2 \left(\frac{1}{n_{0y}^2} + P_{2k} S_k \right) + z^2 \left(\frac{1}{n_{0z}^2} + P_{3k} S_k \right) + 2yz P_{4k} S_k + \\ 2zx P_{5k} S_k + 2xy P_{6k} S_k = 1 \end{aligned} \quad (8.4)$$

となる。ここでも 2 重表示の k については和 $\sum_{k=1}^6$ をとると約束する。展開係数 P_{ij} は $6 \times 6 = 36$ 個あるが、立方対称など、対称性の高い結晶では独立な成分は著しく少なくなる。例えば、ガラスのような等方性媒質では

$$\begin{aligned} P_{11} = P_{22} = P_{33}, \quad P_{12} = P_{13} = P_{21} = P_{23} = P_{31} = P_{32} \\ P_{44} = P_{55} = P_{66} = \frac{1}{2}(P_{11} - P_{12}) \end{aligned} \quad (8.5)$$

このほかの要素はゼロである。同様に立方対称の $\bar{4}3m, 432, m3m$ の結晶では

$$P_{11} = P_{22} = P_{33}, \quad P_{12} = P_{13} = P_{21} = P_{23} = P_{31} = P_{32}, \quad P_{44} = P_{55} = P_{66} \quad (8.6)$$

このほかの要素は全てゼロになる。結晶の対称性と $[P_{ij}]$ の関係については文献¹⁾を参考にしてください。

以上述べたことは一般論である。簡単な具体例で説明する。透明等方媒質（弾性体）に応力がはたらいた場合を考えてみよう。話を簡単にするために、厚さ d の平行平板で、平板の面を x, y 面にとる。光は平板に垂直に入射する、すなわち、光は z 方向に進むものとする。この平板の面内のある部位に働く応力テンソルは、試料の面内に働く力であるから

$$\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{yx} \\ T_{xy} & T_{yy} \end{bmatrix}$$

(8.7)

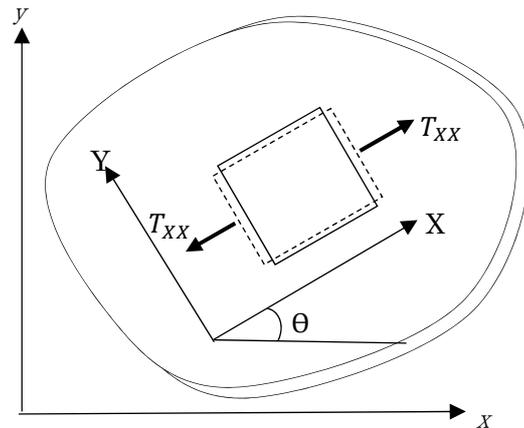


図 8.2 応力とひずみ

と表されるが、 $T_{yx} = T_{xy}$ であるから、このテ

ンソルは x, y 軸を適当に選ぶ（その軸を X, Y 軸とすると）、 $T_{xy} = 0$ ととることができる。平板内に図 8.2 のように稜線が X, Y 軸と平行になるような直方体を取り、その直方体にかかる応力とひずみを考える。なお、 X 軸と元の座標の x 軸とのなす角を θ とする。

直方体の X 方向に働く引張り応力 T_{xx} が加わったとする。この応力によって、媒体は X 方向には伸び、 Y, Z 方向には縮む。媒体がガラスのような無機分子から成り立っている場合には伸びた方向は分子密度が減るからこの方向に振動する電場に対する電気分極が小さくなり、誘電率は減少する。一方、 Y, Z 方向は縮むから Y, Z 方向の誘電率は増えるであろう。長く連なった鎖状高分子が乱雑に分布し、その結果として等方媒質となっているプラスチックのような媒体では張力の方向に高分子は並ぶ傾向があると考えられる。分子軸は大きな分極を持つから、この場合は張力方向で誘電率は増加するであろう。このように媒質によって応力方向の誘電率が增加する場合も減少する場合もありうる。いずれの場合も応力の効果は応力によって媒体内にひずみが生じ、その結果、誘電率、すなわち、屈折率が変化する効果である。なお、上に述べたように等方性媒体では任意の応力は常に主応力方向と呼ばれる直交する 2 つの方向成分 T_{xx}, T_{yy} に分解できる。

X 方向の張力 T_{xx} によって X 方向に生じるひずみ（伸び） S'_{xx} はヤング率を E （電場と同

じ文字だが、混同しないこと) とすると、張力が小さい範囲ではフックの法則から

$$S'_{XX} = \frac{1}{E} T_{XX} \quad (8.8)$$

となる。張力 T_{XX} によって Y、Z 方向にもひずみが発生する。そのひずみを S'_{YY}, S'_{ZZ} とする

と、それは S'_{XX} に比例する。その比例定数 (ポアソン比という) を μ とおくと、

$$\begin{aligned} S''_{YY} &= -\mu S'_{XX} \\ S''_{ZZ} &= -\mu S'_{XX} \end{aligned} \quad (8.9)$$

マイナス符号は X 方向に伸びると ($S'_{XX} > 0$)、それに直交する Y、Z 方向は縮むからである。Y 方向にも張力 T_{YY} がはたらいているとき、同様のひずみが生じる。弾性変形の範囲では T_{XX}, T_{YY} が同時に作用した場合、ひずみは、 T_{XX}, T_{YY} がそれぞれ単独にはたらいた場合に生じるひずみの代数和になることが知られているので、 T_{XX}, T_{YY} の応力に対してひずみは

$$\begin{aligned} S_{XX} &= S'_{XX} + S''_{XX} = \frac{1}{E} (T_{XX} - \mu T_{YY}) \\ S_{YY} &= S'_{YY} + S''_{YY} = \frac{1}{E} (T_{YY} - \mu T_{XX}) \\ S_{ZZ} &= S'_{ZZ} + S''_{ZZ} = -\frac{\mu}{E} (T_{XX} + T_{YY}) \end{aligned} \quad (8.10)$$

このひずみによって屈折率が変わるのである。Z 方向のひずみは小さく、かつ Z 方向に進む光に対してはひずみの効果は測定にかからないので以下では X、Y 方向の変化のみに注目する。

複屈折の光学は屈折率楕円体で表される ((8.2)式)。いまは等方性媒質を考えているから、ひずみのないときの屈折率を n_0 とすると、 $n_{0x} = n_{0y} = n_{0z} = n_0$ であり、応力が加えられていない状態では屈折率楕円体は球体である。応力によりひずみが生じ、それによって屈折率が n_0 から n_x, n_y, n_z に変わったとする。(8.4)式に示したように、弾性限界内の小さなひずみに対しては、誘電率 (あるいは屈折率) の変化も小さいので、その変化量はひずみに比例しているとしてよいので、ひずみの 1 次結合で表される。興味のある X, Y 方向の屈折率については、 S_{4-6} は無視してよいので、(8.4)式より、 P_{ij} に(8.1)式の記法を用いると、

$$\frac{1}{n_X^2} = \frac{1}{n_0^2} + P_{11} S_1 + P_{12} S_2 + P_{13} S_3 \quad (8.11)$$

$$\frac{1}{n_Y^2} = \frac{1}{n_0^2} + P_{21}S_1 + P_{22}S_2 + P_{23}S_3 \quad (8.12)$$

ここで、等方媒質を考えているので、その等方性から ((8.5)式)、

$$P_{11} = P_{22} = P_{33} \quad (8.13)$$

$$P_{12} = P_{21} = P_{23} = P_{32} = P_{31} = P_{13} \quad (8.14)$$

が成り立つ。

n_X, n_Y と n_0 との差は、共に極めて小さいので $n_0 + n_X = 2n_0$ としてよいので、

$$\frac{1}{n_X^2} - \frac{1}{n_0^2} = \frac{(n_0 - n_X)(n_0 + n_X)}{n_X^2 n_0^2} \approx \frac{2(n_0 - n_X)}{n_0^3} \quad (8.15)$$

と近似できる。ここで X、Y 方向のみに応力がかかっているとすると、(8.11) ~ (8.15) 式により、

$$n_X = n_0 - \frac{n_0^3}{2}(P_{11}S_1 + P_{12}S_2 + P_{13}S_3) \quad (8.16)$$

$$n_Y = n_0 - \frac{n_0^3}{2}(P_{12}S_1 + P_{11}S_2 + P_{12}S_3)$$

が得られる。この結果に (8.10) 式を代入すると、

$$n_Y - n_X = \frac{n_0^3}{2E}(1 + \mu)(P_{11} - P_{12})(T_{XX} - T_{YY}) \quad (8.17)$$

この屈折率の差が測定できる基本量で、 $(n_Y - n_X)$ と $(T_{XX} - T_{YY})$ を結ぶ比例定数

$$C = \frac{n_0^3}{2E}(1 + \mu)(P_{11} - P_{12}) \quad (8.18)$$

を光弾性定数 (Strain Optical Coefficient) という。屈折率 n_0 、ポアソン比 μ 、 P_{ij} は無次元であるから、光弾性定数の単位は、ヤング率の単位の逆数となり、 $[\text{m}^2/\text{N}]$ となる。石英ガラスでは $n_0 = 1.46$ 、ポアソン比 $\mu = 0.17$ 、ヤング率 $E = 7.31 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ 、 $P_{11} = 0.121$ 、 $P_{12} = 0.270$ である²⁾から、光弾性定数 C は $-3.61 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$ となる。この単位は大きすぎるので、その 10^{-12} を単位とする Brewster [$10^{-12} \text{ m}^2 / \text{N}$] が用いられる。この単位を用いると石英ガラスの光弾性定数は 3.6 Brewster となる。ポリスチレンでは屈折率 $n_0 = 1.59$ 、ポアソン比 $\mu = 0.35$ であるが、ヤング率は石英ガラスと比べると 1 桁小さく $E = 0.376 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ 、 $P_{11} = 0.30$ 、 $P_{12} = 0.31$ となる²⁾ので光弾性定数 C は 7.2 Brewster となる。

図 8.2 の試料板（厚さ d ）の中に考えた直方体の光学軸は主応力方向の X, Y 方向と一致している。したがって直方体を通る光は X, Y 方向に振動する電気ベクトルを持つ 2 つの固有直線偏光に分かれ、試料板を通過後の x, y 方向の偏光における位相差

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_Y - n_X)d = \frac{2\pi d C}{\lambda}(T_{XX} - T_{YY}) \quad (8.19)$$

を持つようになる。この位相差 δ は上式に示されるように応力差に比例する。

位相差 δ はひずみ検出器で観測できる。図 7.5 のように、偏光子の偏光方向と $1/4$ 波長板の slow 軸方向を互いに 45° になるように置き、これに平行光線を通して円偏光を作り、この光を試料板（図 8.2）に入射させる。試料板を透過した光を、互いに 45° の方向に置いた $1/4$ 波長板と偏光子の組み合わせた光学系を通すと（図 7.5 参照）、透過光強度は

$$I = I_0 \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad (8.20)$$

となる（88P、(7.37)式）。円偏光を使っているので、透過強度は位相差 δ にのみ依存し、試料板の光学軸の傾き θ には関係しない。

試料板に応力分布（正確には主応力の差の分布）がある場合（図 8.3、煩雑さを避けるために T_{XX1}, T_{YY1} などを T_{X1}, T_{Y1} とした。ここで添え字 1, 2, ... は位置を表す）、 P_1, P_2, \dots の各点にはそれぞれ固有の応力 $(T_{X1}, T_{Y1}), (T_{X2}, T_{Y2}), \dots$ があるとすると、各点における位相差 $\delta_1, \delta_2, \dots$ にも分布がある。その分布は (8.20) 式に従って透過光強度の分布として測ることができる。結果として応力分布を求めることができる。応力差が等しく、したがって位相差が等しい部分は同じ明るさの連なりとして観測される。位相差が異なる部分は異なる明るさの連なりとして見られるので、明るさの分布は縞状にみられるであろう。

光学軸、したがって応力方向は試料板の場所によって異なるであろう。この応力方向は次のようにして観測できる。まず、上記の測定で同じ明るさの連なりの部分を記録する。次いで図 7.5 の 2 枚の $1/4$ 波長板を取り除き、検光子の透過軸を入射側の偏光子の透過軸に対して直交させる（図 7.6 参照）。この光学系で試料板の透過光を測定する。光学軸が水平軸（ x 軸）と θ の角度にあるとき（図 8.2）、その部分を透過した光の強度は (7.38) 式で示したように、

$$I = I_0 \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad (8.21)$$

になる。試料板を回転すると、試料板のある特定の部分のひずみによって発生した光学異方性の光学軸が

偏光子の透過軸と一致すると、すなわち、 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \dots$ のところで透過光は消えるので、暗

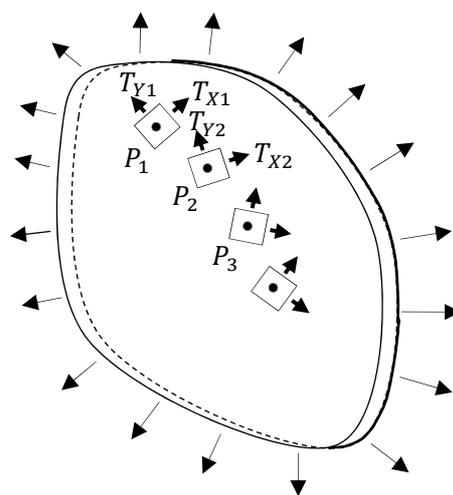


図 8.3 光弾性効果

点として観測される。試料板を回転すると、同じ位相差の連なりの位置も回転してしまうので、もし可能なら、試料板を固定して偏光子と検光子の組を回転して暗部を探す方がよい。透過光がなくなる暗点を示す偏光子の透過軸が主応力の方向である。位相差 δ が等しい帯に沿って偏光子+検光子を回転して暗くなる方位を次々と測定すれば、主応力方向の分布を求めることができる。例えば、物体の中に生じるひずみ模様を見るためには、まずそのモデルを透明な材料で作る。次いで、必要な外力をこのモデルに加え、発生するひずみを上記の光弾性法で決定する。これによって実際の物体内に発生するひずみを推定できる。

8.2 電場による効果(電気光学効果)

等方性媒質に静電場(直流電場)をかけると、媒質は電場方向に分極するから、この分極した状態の誘電率は電場方向とそれに垂直な方向とは違ったものとなるだろう。即ち、静電場をかけることによって、等方性媒質は軸性媒質となり、複屈折を示すことになる。この効果は電場強度の自乗に比例する。これをカー効果 (Kerr effect) という。磁気カー効果と区別するために、電気カー効果ということもあるが、特に断らない限り、カー効果は電気カー効果のことである。

カー効果が液体でも見られることから、電場によって生じた力学的ひずみ(光弾性効果)によるばかりでなく、電場によって分子が分極したことによっても誘電率が変わるのである。一般にこの静電場による誘電率の変化はわずかではある。しかし、この効果は、等方性媒質が電場により複屈折を示す、という質的变化を導く重要な効果である。等方性を崩して異方性にするという意味では、前節で述べたように固体に一軸性応力を加えても光学的異方性を起こすことができる(光弾性効果)。

対称中心を持たない結晶[複屈折を示す結晶]に静電場を加えると、電場に比例した複屈折を示す。この効果のことをポッケルス効果 (Pockels effect) という。以下に電場の働きを一般論としてもう少し詳しく述べる。なお、誘電率は分極と電場との比で定義されるものであるから、この節で述べる効果は、誘電率が電場に依存する効果なので、誘電率の非線形効果を扱っていることになっている。

物体に静電場をかけると、物体を構成している電子、あるいはイオンはその平衡位置からわずかにずれるだろう。このずれのために誘電率は、電場のない状態の誘電率とは異なる値を取ることは上に述べた。この効果を屈折率楕円体の変形として見るために、前節と同様に、逆比誘電率 $\tilde{\eta} = \epsilon_0 \tilde{\epsilon}^{-1}$ の変化を電場で展開する。電子あるいはイオンに働く外部からの静電場の力は物質内で働く電氣的力に比べればはるかに小さいから、電場 $\mathbf{E}^{(*)}$ の二乗までの近似で展開すると、

$$\tilde{\eta}(\mathbf{E}) = \tilde{\eta}(0) + \tilde{\eta}' \cdot \mathbf{E} + \tilde{\eta}'' \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \quad (8.22)$$

と書ける。これを行列の要素で具体的に書けば、

$$\eta_{ij}(E) = \eta_{ij}(0) + \eta_{ijk}E_k + \eta_{ijkl}E_kE_l \quad (8.23)$$

ここで、添え字 i, j, k, l は各々が $1, 2, 3$ の数字を取り、各数字は $1 = x, 2 = y, 3 = z$ を取る表現法を用いてある。さらに、同じ添え字が 2 つあるときはその添え字について和をとる。たと

#) この節では外から印加する電場を \mathbf{E} と記す。電磁波の電場 \mathbf{E} と同じ文字を使ったが混乱はないであろう。

例えば、右辺第 2 項 $\eta_{ijk}E_k$ は添え字の k が 2 つあるから、

$$\eta_{ijk}E_k = \sum_{k=1}^3 \eta_{ijk}E_k = \eta_{ijx}E_x + \eta_{ijy}E_y + \eta_{ijz}E_z$$

となる。なお、(8.23) 式で $\eta_{ij}(0)$ は電場がかかっていない状態での逆比誘電率である。

8.2.1 カー効果

等方性媒質(反転対称を持つ結晶、あるいは液体など)を考える。空間反転は、対称中心に対して \mathbf{r} にある点を $-\mathbf{r}$ に移す操作であるが、反転対称を持つ結晶では、この空間反転操作によって結晶の原子配置は変わらない。このような対称中心を持つ結晶に静電場 \mathbf{E} がかかったとき、電場を含めた空間反転に対して $\eta_{ijk}E_k$ は変わらない。空間反転によって電場は符号を変えるから、空間反転によって $\eta_{ijk}E_k$ が変わらないということは η_{ijk} は $-\eta_{ijk}$ に変わらなければならない。したがって、空間反転した η_{ijk} を η'_{ijk} とおくと、

$$\eta_{ijk} \rightarrow \eta'_{ijk} = -\eta_{ijk} \quad (8.24)$$

となる。一方、空間反転によって結晶は変わらないのであるから、結晶の物質定数である η_{ijk} は空間反転によっても同じ値をとるはずである。このことから

$$\eta_{ijk} = 0 \quad (8.25)$$

が得られる。すなわち、液体などの等方性媒質や反転対称のある結晶では誘電率(逆誘電率でも同様)の電場依存は \mathbf{E} の一乗の項は消えて、二乗の項だけが残るのである。

等方性物質に電場がかかると、物質は電場方向に分極するから、電場方向の誘電率が変わるので、電場方向を光学軸とする一軸性結晶になる。この方向を z 軸としよう。 z 方向の電場によって原子あるいは分子は z 方向に分極するから逆比誘電率は電場方向に対して、

$$\eta(\mathbf{E}) = \frac{1}{n_0^2} + s_{11}E^2 \quad (8.26)$$

となる。ここで、等方性物質であるから $\eta(0) = 1/n_0^2$ で、 n_0 は電場がかかっていないときの屈折率であり、 s_{11} は物質で決まる定数である。一方、 z 方向の分子歪に伴って x y 面内でも歪が誘発されると考えられるから、それによる誘電率の変化も考慮しなければならない。結局、等方性媒質（点対称を持つ結晶も含む）の逆比誘電率は、 z 方向に電場 \mathbf{E} がかかっている場合

$$\tilde{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_0^2} + s_{12}E^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_0^2} + s_{12}E^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_0^2} + s_{11}E^2 \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

となり、媒質は静電場方向を光学軸とする一軸性結晶として振る舞う。(8.27)式より x 、 y 方向に振動電場を持つ電磁波に対する屈折率は、 E^2 までの近似で、

$$\frac{1}{n_{x,y}^2} = \frac{1}{n_0^2} + s_{12}E^2 \quad \therefore n_{x,y} = n_0 - \frac{1}{2}n_0^3s_{12}E^2 \quad (8.28)$$

同様に z 方向に振動電場を持つ電磁波に対しては

$$n_z = n_0 - \frac{1}{2}n_0^3s_{11}E^2 \quad (8.29)$$

となる。(8.28)、(8.29)式から、

$$n_z - n_{x,y} = \frac{1}{2}n_0^3(s_{12} - s_{11})E^2 \quad (8.30)$$

この式を以下で定義されるカー係数 K を用いて書き換えると、

$$n_{x,y} - n_z = K\lambda E^2, \quad K = \frac{n_0^3}{2\lambda}(s_{11} - s_{12}) \quad (8.31)$$

ここで λ は真空での電磁波の波長である。カー係数は波長に依存するから、カー係数を示す際には波長も付記しなければならない。

表 8.1 にいくつかの物質のカー係数を示す。大きなカー効果を示す物質としてニトロベンゼン、ニトロトルエンや二硫化炭素 (CS_2) が知られている。表の物質のうち水以外は有毒である。

表 8.1 カー係数

物質	波長(nm)	屈折率	$K(\text{m/V}^2)$
CCl_4	546	1.460	8.6×10^{-16}
CS_2	546	1.633	3.88×10^{-14}

ニトロベンゼン	589	1.553	2.44×10^{-12}
水	589	1.33	5.1×10^{-14}

カー効果の応用例の一つとして光シャッターがある。その原理を図 8.4 に示す。電極の間隔を d 、光路に沿った長さが l のカー効果を示す物体を置き、これを互いに直交した偏光子 A、B ではさむ。偏光子 A の偏光方向は電場（ y 方向）に対して 45° 傾けてある。

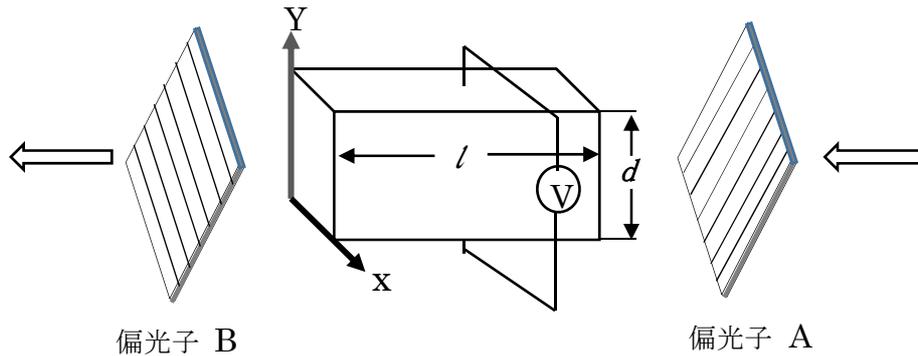


図 8.4 電気光学効果を用いた光シャッター

電場が無いときは、偏光子 A を通った光はそのまま偏光子 B にあたるので、B で遮断され、光は通過できない。一方、電場をかけ、印加電圧を V にすると、電場方向（ y 方向）とそれに垂直な方向（ x 方向）では屈折率が異なり、電磁波は電場方向に偏光した波とそれに垂直に偏光した波がそれぞれ固有偏光となって物体内を伝播する。物体の他端での固有偏光波間の位相差 δ は、

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_x - n_y) l = \frac{2\pi K l V^2}{d^2} \quad (8.32)$$

偏光子 B を通過する光強度の割合は、偏光子 B の透過軸が x 軸に対して -45° であるから、 $\sin^2 \frac{\delta}{2}$ である。位相差 δ は V^2 に比例するから、印加電圧 V によって透過光強度を変えることができる。特に $\delta = \pi$ の場合、すなわち、

$$\frac{2\pi K l V^2}{d^2} = \pi \quad \therefore V_\pi = \sqrt{\frac{d^2}{2Kl}} \quad (8.33)$$

の電圧をかけると、光は 100% 透過する。

もし、偏光子 B の透過軸を偏光子 A のそれと同じ方向になるように置けば、 V_π の電圧を印加することによって光を完全に遮断することができる。一般に、カー効果を利用したセルをカーセルという。ニトロベンゼンを用いたカーセルでは、 V_π は $d = 1\text{cm}$ 、 $l = 5\text{cm}$ にとると、 20kV となり、非常に大きな電圧が必要になる。光シャッターの駆動露光時間は最短で 0.5ns 程度といわれている。

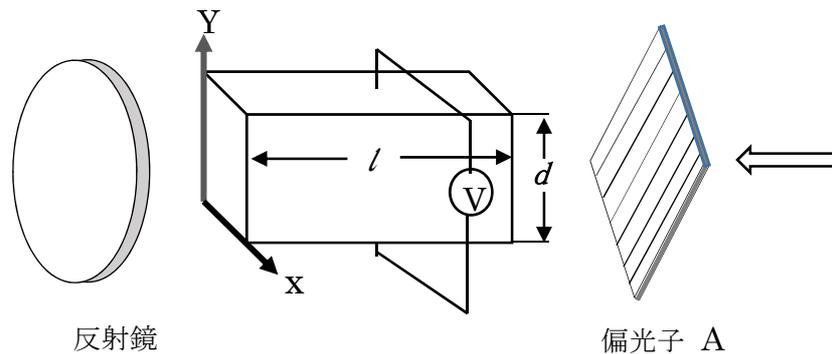


図 8.5 電気光学効果を用いた Q スイッチ

図 8.5 は偏光子 B の代わりに鏡をおいた場合である。ここで印加電圧を V_{π} の半分にする
と位相差は $\delta = \pi/2$ となるから、このセルは 1/4 波長板になる。このため、左側の端面を出
る電磁波は円偏光になる。この円偏光が鏡で反射され、再び媒質を通過すると位相の遅れ
 $\pi/2$ がさらに加わり、結局、鏡で反射されて再び偏光子 A に戻ってきた電磁波は π だけの
位相差が生じており、 π の位相差は直線偏光で、その偏光方向は 135° 方向になり、偏光子
A の偏光方向と直交する。このため、反射波は偏光子 A でさえぎられてしまう。レーザ共振
器の片側を図 8.5 のような配置にすると、レーザ結晶のポンピングの間は光の損失が大き
くなり、レーザ発振は妨げられる。反転分布が最大になる時間にあわせて、印加電圧をオフに
すれば、この瞬間に位相差は無くなり、セルを通過する光は何の障害も無くなり、そのまま
偏光子 A を通るので、レーザ発振が起こる。図 8.5 のような電場による光のスイッチを Q
スイッチという。また、上で述べたように印加電圧がオンの状態では鏡で反射した光は偏光
子 A で遮断され、光源に戻ることはない。それ故、この状態の配置は完全な光アイソレー
タとして機能する。

8.2.2 ポッケルス効果

対称中心を持たない結晶では一般に η_{ijk} は 0 にならないので、 \mathbf{E} の一乗の項が残る。この
とき、 \mathbf{E} の 2 乗の項は一乗の項に比べて小さいので無視できる。どのような η_{ijk} が 0 になら
ずに残るのか、あるいは残った η_{ijk} の間にある関係などは、以下の例題で示すように、結晶
の対称性から知ることができる。ただし、 η_{ijk} の大きさについては実際に測定して求めなけ
ればならない。詳細については文献³⁾を参照してください。

リン酸二水素カリウム結晶 (KH_2PO_4 、略称 KDP) を取り上げ、電場に比例する項に
よる効果 (ポッケルス効果) を具体的に説明します。KDP の結晶対称性は $\bar{4}2m$ で 4 回回転

反転軸（ z 軸とする）があり、また、この軸に垂直な x y 面内に互いに直交する 2 本の 2 回回転軸も存在する。この 2 本の回転軸を x 、 y 軸にとる。この対称性からも明らかなように KDP は z 軸を光学軸とする一軸性結晶である。屈折率楕円体は

$$\frac{x^2 + y^2}{n_0^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1 \quad (8.34)$$

となる。

電場による効果を、応力による変化で扱った方法（(8.2)、(8.3) 式）と同様に、屈折率楕円体の変化として表す。外場がかかっても誘電率の対称性 $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^*$ は変わらないから（ただし、磁場はこの限りではない）、 $\tilde{\epsilon}$ の逆行列である逆比誘電率 $\tilde{\eta}$ も同じ対称性を持つ。もし、媒質に吸収がないとき、誘電率は実数となるので $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ が成り立つ（外部磁場があるときは成り立たない。次節の磁場による効果参照）。

電場が印加されると屈折率楕円体は

$$\left(\frac{1}{n_0^2} + r_{1k} E_k \right) x^2 + \left(\frac{1}{n_0^2} + r_{2k} E_k \right) y^2 + \left(\frac{1}{n_e^2} + r_{3k} E_k \right) z^2 + 2(r_{4k} yz + r_{5k} zx + r_{6k} xy) E_k = 1 \quad (8.35)$$

ここで媒質が光学不活性で（第 9 章参照）、かつ吸収がない場合には $\eta_{ijk} = \eta_{jik}$ となるので、

(8.1) 式を使って係数を簡略化して、 $\eta_{11k} = r_{1k}, \dots, \eta_{23k} = \eta_{32k} = r_{4k}, \eta_{31k} = \eta_{13k} = r_{5k}, \dots$ などと置いた。展開係数 $[r]$ は 6 行 3 列の行列で、元の数、 $i = 1 \sim 6, k = 1 \sim 3$ の値をとれるから、18 個ある。しかし、結晶の対称性のために、個々の結晶に対する r_{ik} の数はさらに少なくなる。展開係数 r_{ik} をポッケルス係数という。

(8.35) 式に (8.34) 式を代入すると、(8.35) 式は

$$r_{1k} E_k x^2 + r_{2k} E_k y^2 + r_{3k} E_k z^2 + 2r_{4k} E_k yz + 2r_{5k} E_k zx + 2r_{6k} E_k xy = 0 \quad (8.36)$$

これは (8.34) 式の楕円体面と (8.35) 式で表される楕円体面との交点为满足する式である。この式に結晶の対称操作をほどこしても、結晶の分子配置は変わらないから、上式は不変でなければならない。この条件をもとに対応する係数を比較すれば、各 r_{ik} が 0 か 0 でないかの区別がつく。

KDP の場合についてこの考えを応用してみよう。KDP 結晶はすでに述べたように $\bar{4}2m$ の対称性を持つから、4 回回転軸（ z 軸）、及びこれに直交する 2 回回転軸（ x 、 y 軸）があ

る。

x 軸の周りの 180° 回転によって

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x, & E_x &\rightarrow E_x \\ y &\rightarrow -y, & E_y &\rightarrow -E_y \\ z &\rightarrow -z, & E_z &\rightarrow -E_z \end{aligned}$$

となるから、また、この回転によって物質定数である r_{ik} は変わらないから、(8.36) 式の各

項 $E_k x_i x_j$ がこの回転によって符号を変えるとき、その係数は 0 にならなければならない。

その結果、 $r_{12}, r_{13}, r_{22}, r_{23}, r_{32}, r_{33}, r_{42}, r_{43}, r_{51}, r_{61}$ は全て 0 である。同様にして、y 軸の周り

に 180° 回転すると $r_{11}, r_{21}, r_{31}, r_{53}, r_{63}$ が 0 になる。その結果 (8.38) 式は

$$r_{41} E_x y z + r_{52} E_y z x + r_{63} E_z x y = 0 \quad (8.37)$$

さらに、z 軸の周りで 90° 回転を行うと、 $x \rightarrow y, E_x \rightarrow E_y$ $y \rightarrow -x, E_y \rightarrow -E_x$ z 成分

は変わらない。これより $r_{41} = r_{52}, r_{63}$ だけが 0 でないことがわかる。これを電気光学係数 η_{ijk}

の表示に戻せば、

$$r_{41} = r_{52} = \eta_{231} = \eta_{321} = \eta_{132} = \eta_{312} \equiv a, \quad r_{63} = \eta_{123} = \eta_{213} \equiv b \quad (8.38)$$

が残り、他の η_{ijk} はすべて 0 になります。これより屈折率楕円体は、(8.35) 式より

$$\frac{x^2 + y^2}{n_0^2} + \frac{z^2}{n_e^2} + 2a E_x y z + 2a E_y x z + 2b E_z x y = 1 \quad (8.39)$$

静電場をかけることによって、 xy, yz, xz の項が生じ、この項のために、光学軸は元の x、y、z 軸とは違ったものになり、それに伴って固有偏光波の屈折率も変わる。

静電場が元の光学軸と同じ Z 方向にかかった場合： $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ 。

屈折率楕円体は(8.39)式で $E_x = E_y = 0, E_z = E$ とおいて、

$$\frac{x^2 + y^2}{n_0^2} + \frac{z^2}{n_e^2} + 2b E x y = 1 \quad (8.40)$$

この式は二軸性光学異性体を示している。主軸の一つは元の主軸の z 軸である。新しい 2 つ

の主軸は元の x 、 y に対して 45° 傾いた座標軸になるから、それを x' 、 y' とすると、これらの座標間には次の関係がある。

$$\begin{aligned} x &= x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ \\ y &= x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ \end{aligned} \quad (8.41)$$

これを(8.40)式に代入すると、 $z = z'$ として

$$\left(\frac{1}{n_0^2} + bE \right) x'^2 + \left(\frac{1}{n_0^2} - bE \right) y'^2 + \frac{z'^2}{n_e^2} = 1 \quad (8.42)$$

となる。これより、

$$\frac{x'^2}{n_x'^2} + \frac{y'^2}{n_y'^2} + \frac{z'^2}{n_e^2} = 1 \quad (8.43)$$

ただし、

$$\frac{1}{n_x'^2} = \frac{1}{n_0^2} + bE$$

あるいは、 E^2 の項は小さいとして無視すると、

$$n_x' = n_0 - \frac{1}{2} b n_0^3 E \quad (8.44)$$

同様に

$$n_y' = n_0 + \frac{1}{2} b n_0^3 E \quad (8.45)$$

光学軸方向に静電場をかけると、(8.42)式に見られるように一軸性結晶であったものが、光学的には二軸性結晶になる。静電場方向に伝播する電磁波は元の結晶対称軸 x 、 y 軸から 45° ずれた方向に電場が振動する固有偏光を持ち、それぞれ屈折率が $n_0 - b n_0^3 E$ と

$n_0 + b n_0^3 E$ の偏光波となって伝播することになる。幾つかの結晶のポッケルス係数を表 8.2

に示す。ポッケルス係数の単位は、(8.35)式の展開式から $r_{ij} E_j$ が無次元であるから、 $[\text{mV}^{-1}]$

である。

カー効果の項で述べた光シャッターをここで述べたポッケルス効果を用いても作ることができる。その原理を図 8.6 に示す。図で、KDP の光学軸を z 軸に、 x 、 y 軸を結晶の x 、 y 軸にとる。図 8.4 との違いは電場が光路と同じ方向にとってあることで、このような配置を縦型という。なお、この配置では光が電極板を通るので電極板は透明電極でなければなら

ない。偏光子Aによって光はx方向に偏光した直線偏光となってKDP結晶に入射する。結晶はx',y'方向に固有偏光軸を持ち、その屈折率はそれぞれ(8.42)、(8.43)式で与えられるから、光が結晶の他端に達したときの固有偏光間の位相差 δ は

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n'_y - n'_x)l = \frac{2\pi bn_0^3 El}{\lambda} = \frac{2\pi bn_0^3 V}{\lambda} \quad (8.46)$$

表 8.2 ポッケルス係数 (文献 1 による)

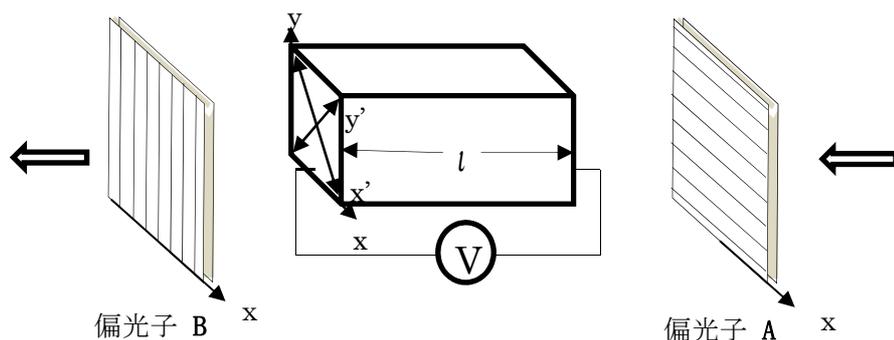


図 8.6 ポッケルス効果を用いた光シャッター

結晶	対称	波長(nm)	屈折率	ポッケルス係数(10^{-12} m/V)
ZnSe	$\bar{4}3m$	548	$n = 2.66$	$r_{41} = r_{52} = r_{63} = 2.0$
LiNbO ₃	3m	633	$n_o = 2.286$ $n_e = 2.200$	$r_{13} = r_{23} = 8.6$ $r_{22} = -r_{12} = -r_{61} = 3.4$ $r_{33} = 30.8$ $r_{51} = r_{42} = 28$
KH ₂ PO ₄ (KDP)	$\bar{4}2m$	546	$n_o = 1.5115$ $n_e = 1.4808$	$r_{41} = r_{52} = 8.77$ $r_{63} = 10.3$
(NH ₄)H ₂ PO ₄ (ADP)	$\bar{4}2m$	546	$n_o = 1.5266$ $n_e = 1.4808$	$r_{41} = r_{52} = 23.76$ $r_{63} = 8.56$

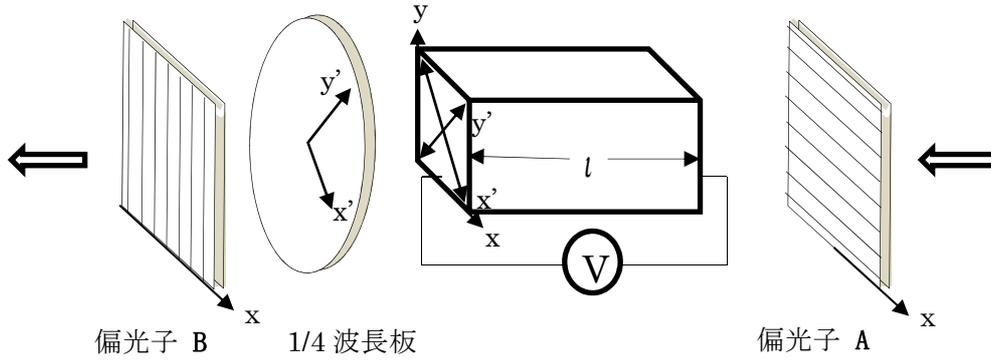


図 8.7 ポッケルス効果を用いた光強度変調

となる。それゆえ、偏光子 B を透過する光強度は $\sin^2 \frac{\delta}{2}$ であるから、印加電圧が

$$\delta = \pi, \quad \therefore V_{\pi} = \frac{\lambda}{2bn_0^3} \quad (8.47)$$

のとき、100 パーセント透過する。KDP の各パラメータの値¹⁾

$$b = 10.3 \times 10^{-12} \text{ mV}^{-1}, \quad n_0 = 1.5115, \quad \lambda = 546 \times 10^{-9} \text{ m}$$

を(8.47)式に代入して、 $V_{\pi} = 7.68 \text{ kV}$ を得るが、この値はカーセルの値よりはるかに小さい。

図 8.6 に 1/4 波長板を図 8.7 のように挿入すると、小さな変調電圧によって透過光を変調する、光強度変調器として使える。図で 1/4 波長板の固有偏光軸（光学軸）はポッケルスセルの固有軸と光の遅速も含めて一致させておく。そうすると、1/4 波長板の位相差は $\frac{\pi}{2}$ であるから、ポッケルスセルと 1/4 波長板を通過した波の位相差はそれぞれの位相差の和になるので、(8.46) 式より、

$$\delta = \frac{2\pi bn_0^3 V}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \quad (8.48)$$

となる。今、印加電圧を

$$V = V_0 \sin \omega_m t \quad (8.49)$$

で変調すると、(8.48) 式の位相差は

$$\delta = A \sin \omega_m t + \frac{\pi}{2}, \quad A = \frac{2\pi bn_0^3 V_0}{\lambda} \quad (8.50)$$

となり、透過光強度は

$$\frac{I_T}{I_0} = \sin^2 \frac{\delta}{2} = \left[\sin \left(\frac{1}{2} A \sin \omega_m t + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin(A \sin \omega_m t) \quad (8.51)$$

$A \ll 1$ の場合には、

$$\frac{I_T}{I_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} A \sin \omega_m t \quad (8.52)$$

となるから、変調電圧に比例したひずみのない変調光強度が得られる。ここで、明らかなように、 $1/4$ 波長板はバイアスの役目をしており、光強度の位相差依存性が最も大きく変わる点 ($\delta = \frac{\pi}{2}$) に変調電圧を移動する役目をしている。

8.3 磁場による効果 (磁気光学効果)

外部から磁場を印加すると、物質の電子状態が磁場によって変わるから、それに従って誘電率も変化すると期待される。磁場 \mathbf{B} がかかると物質内の電子にはローレンツ力 $-e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (\mathbf{v} : 電子の速度) がはたらくのでその力によって、電子はその位置を変える。その変化に従って電気双極子が新たに発生するだろう。電子の変位 \mathbf{r} は電場 \mathbf{E} とつりあっているので電子の変位と電場は同位相と考えられる。電子の速度は $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \propto \frac{d\mathbf{E}}{dt} \propto i\mathbf{E}$ とな

るから、電子の速度と電場の間には $\frac{\pi}{2}$ の位相差がある。磁場によって新たに発生する電気双極子は $\mathbf{p} \propto -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \propto -i\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ となる。これらを考慮すれば、磁場がかかったとき、電束密度 \mathbf{D} は

$$\mathbf{D} = \tilde{\epsilon}\mathbf{E} - i\mathbf{E} \times \mathbf{G} \quad \text{ただし} \quad \mathbf{G} = \epsilon_0 \chi \mathbf{B} \quad (8.53)$$

と表せるであろう。ここで χ は物質で決まる定数で、等方媒質ではスカラー量であるが、一般の媒質ではテンソルとなるであろう。 $\mathbf{G} = (G_x, G_y, G_z)$ は誘電率 $\tilde{\epsilon}(\mathbf{B} = \mathbf{0})$ に比べて小さく、また、第一近似の範囲では、(8.53)式に示したように、印加磁場 \mathbf{B} に比例する。

吸収のない媒質では誘電率 $\tilde{\epsilon}$ は実数であるが、磁場がかかると誘電率は複素数になる。(8.53)式を具体的に書き下すと、 $\mathbf{D} = \tilde{\epsilon}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}$ とおいて

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} - iG_z & \epsilon_{xz} + iG_y \\ \epsilon_{xy} + iG_z & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} - iG_x \\ \epsilon_{xz} + iG_y & \epsilon_{yz} + iG_x & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (8.54)$$

この表示が磁場の 1 次の項までを考慮した誘電率である。

等方物質の場合、磁場を z 軸方向にとると、 $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} \equiv \epsilon$, $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{xz} = 0$ 、

$G_x = G_y = 0$, $G_z = \varepsilon_0 \chi B$ だから、

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & -i\varepsilon_0 \chi B & 0 \\ i\varepsilon_0 \chi B & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad (8.55)$$

と、簡単な表示になる。

媒質を第4章6節で述べた電気双極子モデル（ローレンツ模型）で近似し、これに磁場を印加することによって、等方性媒質の誘電率が(8.55)式に示されるような異方性を持ち、光学異方体として振る舞うことを示そう。このモデルは屈折率の分散の項で述べたように、極めて簡単な古典力学に基づいたモデルであるが、そこから得られる結果は量子力学に基づいて計算された結果とほぼ同じ結果がえられるので便利なモデルである。

電気双極子モデルでは、電子は核を中心として固有角振動数 ω_0 で振動しているとする。それ故、電子の平衡点からのずれを \mathbf{r} とすると、電子には平衡点に戻ろうとする復元力 $-m\omega_0^2 \mathbf{r}$ がはたらく。ここで m は電子の質量である。外部から磁場 \mathbf{B} が印加されると、その磁場によって電子にはローレンツ力 $-e \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \right)$ がはたらく。さらに電磁波の電場 \mathbf{E} による力 $-e\mathbf{E}$ も作用する。なお、電磁波の磁場成分は外部磁場 \mathbf{B} に比べて十分に小さいので無視できる。これらの力により、電子に対する運動方程式は次式のようになる。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} - e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - e\mathbf{E} \quad (8.56)$$

磁場を z 軸方向にとり、この方程式を成分に分けて書くと、

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -m\omega_0^2 x - e \frac{dy}{dt} B - eE_x \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -m\omega_0^2 y + e \frac{dx}{dt} B - eE_y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -m\omega_0^2 z - eE_z \end{aligned} \quad (8.57)$$

電磁波は振動数 ω で振動しているとする、電子もそれに追従して振動する部分だけが残り、そのほかの振動は時間が経てば減衰してしまうので、 ω で振動する項のみを考えればよい。そうすると x, y, z は $e^{i\omega t}$ の形で振動しているから、 $\frac{dx}{dt} = i\omega x$, $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$ 等となり、(8.57) 式は次のように整理できる。

$$\begin{aligned}
m(\omega_0^2 - \omega^2)x + ie\omega B y &= -eE_x \\
-ie\omega B x + m(\omega_0^2 - \omega^2)y &= -eE_y \\
m(\omega_0^2 - \omega^2)z &= -eE_z
\end{aligned} \tag{8.58}$$

x, y, z の連立1次方程式として(8.58)式を解くと

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_x + i \frac{e^2 \omega B}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} E_y \\
y &= -i \frac{e^2 \omega B}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} E_x + \frac{-e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_y \\
z &= \frac{-e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_z
\end{aligned} \tag{8.59}$$

となる。但し、磁場は弱いとして B^2 の項は無視した。

電子が平衡点から(8.57)式で与えられる \mathbf{r} にずれるので、発生する電気双極子は $-\mathbf{er}$ である。単位体積にこのような電気双極子が N 個有るとすると、分極は $\mathbf{P} = -\mathbf{er}N$ で与えられるから、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \tilde{\epsilon} \mathbf{E}$ の定義により、誘電率テンソルは以下のように書ける。

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \epsilon & -i\epsilon_0 \chi B & 0 \\ i\epsilon_0 \chi B & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad \text{但し、} \quad \epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} \right) \tag{8.60}$$

$$\chi = \frac{e^3 N \omega}{\epsilon_0 m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

ここで等方的誘電率を ϵ と置いた。一般表示の(8.55)式に対する、このモデルでの具体的な表示が(8.60)式である。なお、(8.60)式の ϵ は磁場がかかっていないときの誘電率である。5章で述べたように異なる固有振動を持つ電気双極子が幾つかあることを考慮すれば、(8.60)式の ϵ は $\epsilon_0 n_0^2$ と置いてよい。ここで n_0 は磁場のかかっていないときの媒質の屈折率である。

同様に、 χ に表れる固有振動 ω_0 、 N もそれぞれの固有振動子によって変わり、それらの和が χ の値になる。磁場効果を表す χ は、(8.60)式で示すように、入射光の波長に依存し、波長が吸収端 ω_0 に近づくとその値が大きくなる。

等方的であった媒質が磁場のもとでは、(8.60)式が示すように非対角要素を持つ誘電率 $\tilde{\epsilon}$ になるから、媒質は異方性を示すことになる。誘電率の非対角要素が純虚数になっている点一般の一軸性結晶と異なる点である。この虚数項は電磁波の吸収を表すものではなく、すぐあとに示すように左回り及び右回り円偏光が固有電磁波としてそれぞれ異なる速さをも

って、媒質中を伝搬することを意味している。

8.3.1 ファラデー効果

電磁波が静磁場と同じ \mathbf{Z} 方向に進むとしよう ($\mathbf{n} // \mathbf{B} // \mathbf{z}$, ファラデー配置)。

この場合が、磁場効果がもっとも顕著に現れる。電場 \mathbf{E} と電束密度 \mathbf{D} を結ぶ一般式、5章2節の(5.27)式

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \{n^2 \mathbf{E} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{n}\} \quad (8.61)$$

において、上式と \mathbf{n} とのスカラ積をとると、 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$ が得られる。今の場合 \mathbf{n} が z 方向を向いているとしているから、これにより $D_z = 0$ である。等方性媒質の場合、(8.60)式により $D_z = \epsilon E_z$ であるから、 \mathbf{E} の z 成分も 0 になるので $E_z = 0$ である。(8.61)式の左辺 \mathbf{D} を、 $\mathbf{D} = \tilde{\epsilon}(\mathbf{B})\mathbf{E}$ に置き、(8.60)式の $\tilde{\epsilon}(\mathbf{B})$ を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} n_0^2 E_x - i\chi B E_y &= n^2 E_x \\ i\chi B E_x + n_0^2 E_y &= n^2 E_y \end{aligned} \quad (8.62)$$

が得られる。 E_x, E_y に対するこの連立1次方程式で、 E_x, E_y が 0 以外の有意の解を持つためには、それらの係数からなる行列式が 0 でなければならない。すなわち、

$$\begin{vmatrix} n_0^2 - n^2 & -i\chi B \\ i\chi B & n_0^2 - n^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.63)$$

これより、 n が決まる。

$$n_{\pm} = \sqrt{n_0^2 \pm \chi B} \approx n_0 \pm \frac{\chi B}{2n_0} \quad (8.64)$$

n_+ のとき、(8.62)式の第1式により、

$$E_y = iE_x \quad (8.65)$$

E_x と E_y の大きさが等しく、位相が $\pi/2$ ずれている。(8.63)式の電場をジョーンズ・ベクトルで表すと、 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ となるから、電磁波の電場 \mathbf{E} の向きが右回りに回転する、すなわち、

この波は伝搬速度 c/n_+ をもって右回り円偏光として伝搬する(3章3節 (3.67)式参照)。

n_+ のときも同様にして求めると、

n_- のときも同様にして求めると、

$$E_y = -iE_x \quad (8.66)$$

となり、この場合はジョーンズ・ベクトルで表すと、 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ となるから、左回り円偏光

になり、伝搬速度は $\frac{c}{n_-}$ である。第5章複屈折と結晶光学で述べたように、一軸性結晶や二軸性結晶では互いに直交する直線偏光が異なる伝搬速度を持つ固有偏光として伝搬するが、等方性媒質に磁場がファラデー配置で印加されると、異なる伝搬速度の左および右回りの円偏光が固有偏光波として伝搬するのである。

長さ l の円柱に円柱方向に磁場がかかっている。この円柱に磁場方向と同じ方向 (z 方向) に進み、 x 方向に直線偏光した電磁波が入射したとする(図 8.8)。入射光の直線偏光は左右回りの、振幅の等しい2つの円偏光に分解できるから、入射

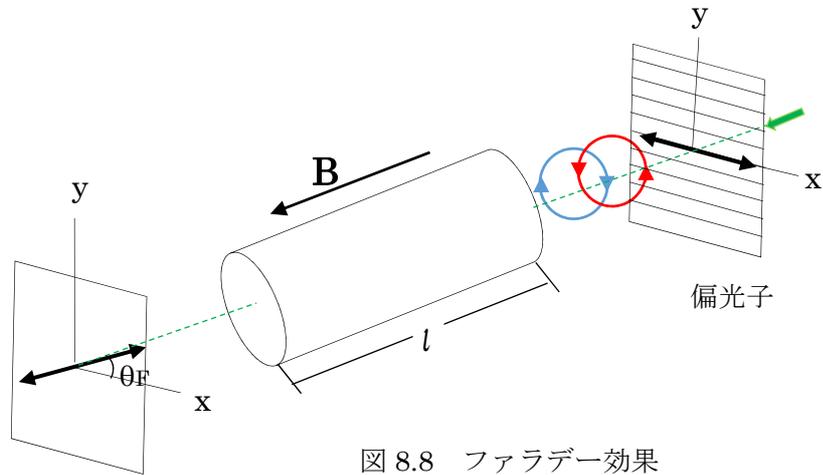


図 8.8 ファラデー効果

した電磁波は媒質内では $k_{\pm} = \frac{2\pi}{\lambda} n_{\pm}$ の波数を持って伝播する。これら2つの振幅の等しい円偏光電磁波は次のように書ける。

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{E_0}{2} (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) e^{i(\alpha - k_{\pm}z)} \quad (8.67)$$

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ は x, y 方向の単位ベクトルである。この2つの円偏光の電場を合わせてできる合成

電場の x, y 成分は、 $k_0 = \frac{1}{2}(k_+ + k_-)$, $\kappa = \frac{1}{2}(k_+ - k_-)$ とおくと、

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{E_0}{2} e^{i\alpha} (e^{-ik_+z} + e^{-ik_-z}) = \frac{E_0}{2} e^{i(\alpha - k_0z)} (e^{-i\kappa z} + e^{i\kappa z}) = E_0 e^{i(k_0z - \alpha)} \cos \kappa z \\ E_y &= i \frac{E_0}{2} e^{i\alpha} (e^{-ik_+z} - e^{-ik_-z}) = i \frac{E_0}{2} e^{i(\alpha - k_0z)} (e^{-i\kappa z} - e^{i\kappa z}) = E_0 e^{i(k_0z - \alpha)} \sin \kappa z \end{aligned} \quad (8.68)$$

電磁波が円柱を出るとき、 x 方向と y 方向の電場の比は $z = l$ において、

$$\frac{E_y}{E_x} = \tan \kappa l \quad \text{ただし、} \kappa = \frac{\pi \chi B}{\lambda n_0} \quad (8.69)$$

となる。すなわち、 x 方向に直線偏光した電磁波が媒体を出るとき、 x 軸から $\theta_F = \kappa l$ だけその偏光方向が回転している。(8.68)式に示すように媒体を出た後は再び直線偏光になるので、結局、出射光は、 $\kappa l = \frac{\pi \chi B l}{\lambda n_0}$ であるから、

$$\theta_F = V B l \quad \text{ただし、} V = \frac{\pi \chi}{\lambda n_0} \quad (8.70)$$

だけ回転した直線偏光となる(ファラデー効果)。回転角 θ_F の大きさは磁場の大きさと媒体の長さに比例する。単位磁束密度、単位長さあたりの回転角をヴェルデ (Verdet) 定数といい、 V で表す。上に述べたように $V = \frac{\pi \chi}{\lambda n_0}$ である。電気双極子モデルでは χ は (8.60) 式で与えられるから

$$V = \frac{\pi \chi}{\lambda n_0} = \frac{e^3 N \omega^2}{2 c \epsilon_0 n_0 m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (8.71)$$

幾つかの物質のヴェルデ定数を表 8.3 に示す。

表 8.3 ヴェルデ定数 (at 589.3nm)

物質	温度 (°C)	V (deg·T ⁻¹ ·m ⁻¹)
水	20	2.18×10^2
ダイヤモンド		2.0×10^2
クラウンガラス	18	2.68×10^2
フリントガラス		5.28×10^2
二硫化炭素(CS ₂)	20	7.05×10^2
塩化ナトリウム		6.0×10^2

電気双極子モデルではヴェルデ定数 V は(8.71)式で与えられるが、その波長依存性は吸収端 ($\omega \approx \omega_0$) から十分離れた波長のところでは $\omega_0^2 \gg \omega^2$ として、分母の ω^2 を無視できるから、ヴェルデ定数は λ^{-2} に比例する結果が得られる。この結果は多くの実測値をよく再現している。

プラスのヴェルデ定数は、磁場の方向と光の進行方向が同じ向きするとき、光を観測者から

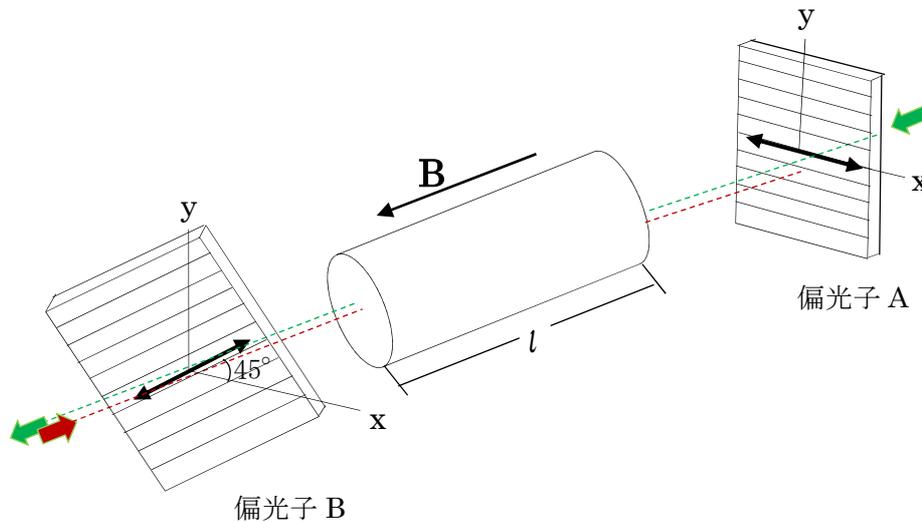


図 8.9 アイソレーター。ファラデー回転角を 45° にすると左から入射する光は透過するが、右からの光は偏光子 A でブロックされる。

見て偏光が左回り(反時計回り)に θ_F だけ回転することに対応している。磁場の向きが光の進行方向と逆向きのときは B がマイナスとなるので、偏光の回転も逆になり、右回り(時計回り)になる。それ故、図 8.9 のような光学素子を配置した光学系を考える。偏光子 A の透過軸は水平軸方向に、偏光子 B の透過軸は水平軸に対して 45° 傾いている。ファラデー回転子はこれらの偏光子に挟まれている。ここで磁場の大きさ、あるいは媒質の長さを適当にとり、ファラデー回転角が $\theta_F = 45^\circ$ になるようにする。このようにセットすると、右から入射した光は偏光子 A で直線偏光になり、ファラデー回転によってファラデー回転子を出た光は偏光を 45 度回転するから、その偏光方向は偏光子 B の透過軸と平行になるので強度を変えることなく通過する。これに反して、左から入射した光は偏光子 B で 45° 方向の偏光になり、さらにファラデー回転子によって 45° 回転するので、偏光子 A に透過軸と直交する。このため左から入射する光はこの光学系で遮断される。図 8.9 のように、偏光子 A の透過軸に対して、偏光子 B の透過軸を 45° に傾けておくと、右から入射した光は透過する。一方、左から入射した光は遮断されるので、この光学系は光のアイソレーターになっている。

図 8.9 で偏光子 B を鏡で置き換えると、右から入射した光がファラデー回転子を透過後、鏡で反射されて、再びファラデー回転子を通ると、偏光軸の回転角は 2 倍の $2\theta_F$ になるので、 $\theta_F = 45^\circ$ に取ればこの光学系はアイソレーターとして機能する。

同様なアイソレーターはプリズムと鏡を使っても実現できる (図 8.10)。ここでもファラデー回転子は 45° にセットしておく。入射光は偏光ビームスプリターで紙面に平行な偏光成分だけがファラデー回転子に入射する。ファラデー回転子を出た光はその偏光軸が 45° 回る。その光を鏡で反射して、再びファラデー回転子を通すと、その光の偏光軸はさらに 45° 回転するので、初めの入射光の偏光軸から 90° 回転した方向になっている。そのためその光は偏光ビームスプリターで直角方向に

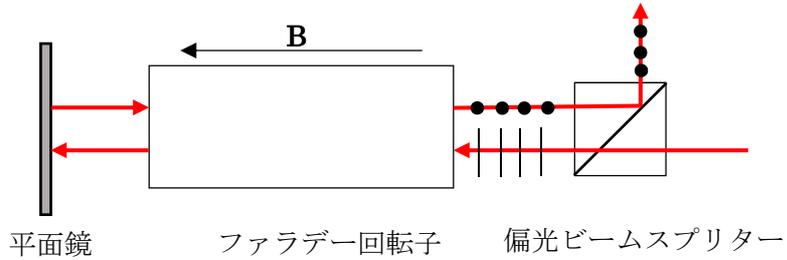


図 8.10 アイソレーター

曲げられ、光源には戻らない。すなわち、ファラデー回転子は光アイソレータになる。磁場を切れば、偏光軸の回転はなくなるので、光は光源方向にもどされるので、この光学系は単なる平面反射鏡になる。

ファラデー回転子の作用をジョーンズ行列で表すことは簡単である。x 方向に偏光した振幅 a_x の光は偏光方向を θ_F 回転するから、回転した後の電場ベクトルは $a_x \begin{pmatrix} \cos \theta_F \\ \sin \theta_F \end{pmatrix}$ 、同様に y 方向に偏光した振幅 $a_y e^{i\delta}$ の光は $a_y e^{i\delta} \begin{pmatrix} -\sin \theta_F \\ \cos \theta_F \end{pmatrix}$ となる。x,y 方向に偏光した光はそ

れぞれ独立にその偏光方向を θ_F だけ回転するのであるから、 $\begin{bmatrix} a_x \\ a_y e^{i\delta} \end{bmatrix}$ で入射した光は

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_F & -\sin \theta_F \\ \sin \theta_F & \cos \theta_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y e^{i\delta} \end{bmatrix} \quad (8.72)$$

でファラデー回転子から出射することになる。偏光の方向を θ_F 回転させるファラデー回転子の作用 \tilde{C}_{θ_F} は

$$\tilde{C}_{\theta_F} = \begin{bmatrix} \cos \theta_F & -\sin \theta_F \\ \sin \theta_F & \cos \theta_F \end{bmatrix} \quad (8.73)$$

と表される。これは第 3 種 3 節では座標系を θ 回転したとき、x y 座標系で (E_x, E_y) と表せる電場が、 θ 回転した x'y' 座標系でみたとき、 (E'_x, E'_y) と表せたとする、2つの表示

の間には (3.20) 式の関係にある。座標系の θ 回転は電場ベクトルを $-\theta$ 回転と同じ操作であるから、(3.20) 式で、 $\theta = -\theta_F$ とすれば、(8.72) 式が得られる。

偏光状態をストークス・ベクトル (S_0, S_1, S_2, S_3) で表した場合のファラデー回転子の作用の表示も (8.72) 式をもとにその偏光状態をストークス・ベクトルで表し、始めと終わりのストークス・ベクトルをつなぐ行列を求めればよい。ファラデー回転のミュラー行列は

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta_F & -\sin 2\theta_F & 0 \\ 0 & \sin 2\theta_F & \cos 2\theta_F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.74)$$

となる。座標系の回転を表すミュラー行列 (7.62) 式で $\theta = -\theta_F$ と置けば、(8.74) 式が得られるのはジョーンズ行列の場合と同じ理由による。

直線偏光の方向を回転させる光学素子を旋光子という。ファラデー回転子はその例である。この他の旋光子の例としては次章で述べる光学活性を示す媒質を利用したものがある。

ファラデー効果で生じた偏光軸方向の回転は、同じ光路を光が逆行するとき、もとにはもとらず、さらに回転する。この点が次章で述べる、ある種の結晶、あるいは溶液で起こる、外場無しでも偏光軸が回転する旋光性(光学活性)と異なる。光学活性の媒質では光が逆行すると偏光方向は元に戻るのである。

8.3.2 フォイクト効果

ファラデー配置では光の進行方向は磁場と同じ方向であった。フォイクト (Voigt) 配置では光の進行方向が磁場と直交する方向である。印加磁場の方向を z 軸方向にとり、光の進行方向を x 方向とする ($\mathbf{k} // \mathbf{n} // x$)。

(8.61)式で $\mathbf{n} = (n, 0, 0)$ と置くと、 $D_x = 0$ となる。これは波数ベクトルと \mathbf{D} が直交することから得られる結果である。等方性媒質に磁場がかかったときの誘電率 $\tilde{\epsilon}(\mathbf{B})$ ((8.55)式)を(8.61)式に代入して各成分を書くと、 $\epsilon = \epsilon_0 n_0^2$ だから、

$$n_0^2 E_x - i\chi B E_y = 0 \quad (8.75)$$

$$i\chi B E_x + n_0^2 E_y = n^2 E_y \quad (8.76)$$

$$n_0^2 E_z = n^2 E_z \quad (8.77)$$

(8.77)式により z 方向に偏光した光の屈折率は n_0 となり、磁場の影響を受けない。一方、 x 、 y 方向については(8.75)式より

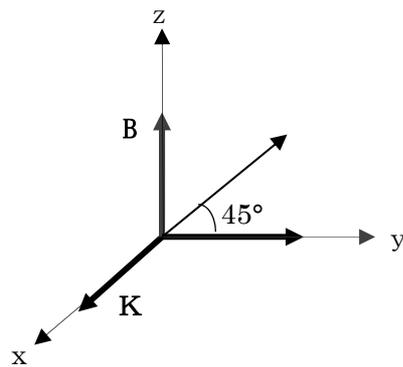


図 8.12 フォイクト配置

$$E_x = -\frac{i\chi B}{n_0^2} E_y \quad (8.78)$$

となり、光の進行方向に傾いた小さな電場が生じる ($\chi B \ll n_0^2$)。 (8.78)式を(8.76)式に代入して n を求めると、

$$n = n_0 \left(1 - \frac{\chi^2 B^2}{n_0^4} \right)^{\frac{1}{2}} \approx n_0 - \frac{\chi^2 B^2}{2n_0^3} \quad (8.79)$$

が得られる。これより、媒体内では z 方向に偏光した光と、 y 方向に偏光した光は伝搬速度が異なり、その差は磁場の自乗に比例する。この効果をフォイクト効果 (Voigt 効果) またはコットン・ムートン効果 (Cotton-Mouton 効果) という。

直線偏光の方向が磁場に対して 45° 傾いた光が媒体に入射すると、 y 、 z 方向に偏光した電場の大きさは等しく、媒体内では屈折率だけが異なるので、試料の長さ l を通過後の y 方向に偏光した光と z 方向に偏光した光の位相差 δ は

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n l = \frac{\pi\chi^2 B^2}{\lambda n_0^3} \quad (8.80)$$

となり、出射光は 45° 方向を長軸、それに直角方向に短軸を持つ楕円偏光になる。短軸径と長軸径との比は $\tan \frac{\delta}{2}$ である。

磁気光学効果のひとつに磁気光学カー効果 (Magneto-optical Kerr Effect) がある。これは強磁性体などの表面で反射した光の偏光方向が回転する、あるいは直線偏光した入射光に対して反射光が楕円偏光になり、楕円の長軸が入射光の偏光方向に対して回転する現象である。ファラデー効果は透過光の偏光方向が回転する効果であるが、磁気光学カー効果は反射光の偏光方向が回転する効果である。磁気光学カー効果は表面磁化構造を検出するのに利用できる。

参考文献

- 1) "Optical Waves in Crystals" Yariv & Yeh John Wiley & Sons.2003, 321p
- 2) 同上 324p
- 3) 同上 508~515p